

Prof. Dr. Alfred Toth

Nachbarschaft und Umgebung von Zahlen

1. In Toth (2017) hatten wir zwischen der Nachbarschaft und der Umgebung zunächst von Objekten unterschieden. Während für die Nachbarschaft (N) eines Elementes x gilt

$$x \in N(x),$$

gilt für seine Umgebung (U)

$$x \notin U(x),$$

d.h. ein Element x kann zwar sein eigener Nachbar, nicht aber seine eigene Umgebung sein. Ferner ist natürlich jede Nachbarschaft eine Umgebung, aber die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

2. Wenn wir von den bekannten Peano-Axiomen (etwa in der nachstehenden Fassung) ausgehen

1. $0 \in \mathbb{N}$

2. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$

3. $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$

4. $\forall n, m(m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$

5. $\forall X(0 \in X \wedge \forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X \Rightarrow n' \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X)$

dann erhalten wir, falls x eine Zahl ist, bekanntlich die Peanozahlen

$$P = (0, 1, 2, \dots).$$

Wie Max Bense gezeigt hatte (1975, S. 168 ff. und 1986, S. 192 ff.), kann man die peircesche Zeichenrelation, aufgefaßt als Relation über „Primzeichen“ bzw. „Zeichenzahlen“ (vgl. Bense 1980), mit Hilfe der vollständigen Induktion einführen, sofern man die Peanozahlen mit 1 beginnen läßt, also

$$P = (1, 2, 3, \dots).$$

Bei den Peanozahlen ist es also der Nachfolger, den wir mit S und den Vorgänger, den wir mit A bezeichnen, welche die Zahlenfolge eindeutig bestimmen, vgl. etwa

$$S(1) = 2$$

$$A(2) = 1.$$

2. Eine neue Möglichkeit, die Peanozahlen in Teilfolgen zu zergliedern, bietet sich nun durch die Anwendung von N und U. Dann erhalten wir

$$N(1) = (1, 2)$$

$$U(1) = 2$$

$$N(2) = (2, 3)$$

$$U(2) = (1, 2, 3)$$

$$N(3) = (3, 4)$$

$$U(3) = (2, 3, 4)$$

...

...

$$N(n-1) = ((n-1), n)$$

$$U(n-1) = ((n-2), (n-1), n),$$

d.h. man kann die Relation der Zeichenzahlen Z durch die Umgebung der Peanozahl 2 definieren

$$Z = U(2) = (1, 2, 3).$$

Ferner gilt natürlich

$$N(1) \circ N(2) = (1, 2, 3).$$

Wie man leicht einsieht, hat U zwar eine gewisse formale Ähnlichkeit mit der von Neumann-Umgebung, aber die Peanozahl 1 kann nur „rekursiv“ durch seine eigene Nachbarkeit definiert werden.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1986

Toth, Alfred, Nachbarschafts- und Umgebungsrelationen bei Menus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2017

23.12.2018